Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală – Maramureş, Clasa a X-a
Soluții

1. a) Presupunem că f poate fi strict descrescătoare. Atunci, $f \circ f$ este strict crescătoare, iar funcția $g: A \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2016 \cdot f(x) - 2015x$ este strict descrescătoare, contradicție.

b) De exemplu, funcțiile $f_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = 2015x + a$, $a \in \mathbb{R}$ sunt soluții.

c) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, cu $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

Se arată ușor că f este injectivă.

Mulțimea A fiind finită, rezultă că f este și surjectivă. Așadar există $a_k \in A$ astfel încât $f(a_k) = a_1$.

Atunci, $a_1 = f(a_k) = \dfrac{f(f(a_k)) + 2015 \cdot a_k}{2016} \geq \dfrac{a_1 + 2015 \cdot a_k}{2016}$, de unde rezultă că $a_1 \geq a_k$.

Dar $a_1 \leq a_k$, deci $a_1 = a_k$, adică $f(a_1) = a_1$. Deoarece $a_2 = \min\{a_2, \ldots, a_n\}$, raționând la fel obținem că $f(a_2) = a_2$. Inductiv, rezultă că $\forall\, i = \overline{1, n}$, $f(a_i) = a_i$, deci singura soluție este funcția 1_A.

2. $2016^{\log_{2015} 2014} > 2014^{\log_{2016} 2017} \Leftrightarrow 2014^{\log_{2015} 2016} > 2014^{\log_{2016} 2017} \Leftrightarrow \log_{2015} 2016 > \log_{2016} 2017 \Leftrightarrow$
$\dfrac{\lg 2016}{\lg 2015} > \dfrac{\lg 2017}{\lg 2016} \Leftrightarrow \lg^2 2016 > \lg 2015 \cdot \lg 2017 \Leftrightarrow \sqrt{\lg 2015 \cdot \lg 2017} < \lg 2016$.

Dar $\sqrt{\lg 2015 \cdot \lg 2017} < \dfrac{\lg 2015 + \lg 2017}{2} = \lg \sqrt{2015 \cdot 2017} < \lg 2016$

3. Condiții de existență: $x, y \in (0, \infty)$.

a) $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y \Leftrightarrow x + y = x \cdot y \Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1$ și orice pereche (x, y), cu $\begin{cases} x > 1 \\ y = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$ este soluție.

b) Alegem $y = a^k$, cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Obținem $\log_a(x + a^k) = \log_a(x^k) \Leftrightarrow x + a^k = x^k$ și apoi

$$1 + \frac{1}{x} \cdot a^k = x^{k-1} \qquad (1)$$

Fie $f, g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \cdot a^k$, $g(x) = x^{k-1}$.

Deoarece f este strict descrescătoare și g este strict crescătoare, ecuația (1) are cel mult o soluție.

I. $\boldsymbol{a > 1}$. $f(1) > g(1)$ și $f(2a) < g(2a)$ $\Rightarrow$ ecuația are o unică soluție, x_k, care aparține intervalului $(1, 2a)$.

II. $\boldsymbol{a < 1}$. $f(1) > g(1)$ și $f\left(\dfrac{2}{a}\right) < g\left(\dfrac{2}{a}\right)$ $\Rightarrow$ ecuația are o unică soluție, x_k, care aparține intervalului $\left(1, \dfrac{2}{a}\right)$.

4. Alegem un reper cartezian cu centrul în O și notăm cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor din problemă.

Avem $h=a+b+c$, $HA=|h-a|=|b+c|=OM$, unde astfel încât $OBMC$ e un paralelogram, cu $M(b+c)$.

Din ipoteză, $HA=OA=R$, unde R este raza cercului $\mathcal{C}(O, R)$, circumscris triunghiului ABC.

Așadar $OM=OA=R$, deci $M(b+c)\in\mathcal{C}(O, R)$, iar $OBMC$ este un romb.

Deoarece $m\left(\widehat{BMC}\right)=m\left(\widehat{BOC}\right)=2\cdot m\left(\widehat{A}\right)$, rezultă că $m\left(\widehat{A}\right)=60^\circ$. Analog, din $HB=OB$ deducem că $m\left(\widehat{B}\right)=60^\circ$, deci triunghiul ABC este echilateral. Rezultă că $m\left(\widehat{C}\right)=60^\circ$, deci $P(a+b)\in\mathcal{C}(O, R)$.

Obținem $HC=|h-c|=|a+b|=OP=R$.